

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: 4 Ιουνίου 2024

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76 (Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 155 (Ορισμός κυρτής συνάρτησης)

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 216 (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)

A4.

α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Παρατηρούμε ότι $D_g = D_h = [1, +\infty)$. Η συνάρτηση $f = \frac{g}{h}$ ορίζεται για $\begin{cases} x \in D_g \cap D_h \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$.

Λύνουμε την εξίσωση: $h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Επόμενως, η f ορίζεται για $x > 1$. Δηλαδή $D_f = (1, +\infty)$ με τύπο:

$$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Η συνάρτηση $r = g \cdot h$ ορίζεται στο $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ με τύπο:

$$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}$$

B2. Για $x > 1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f , άρα έχει και την ιδιότητα «1-1» και ορίζεται η αντίστροφή της.

Το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης f θα είναι:

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)\right) = (1, +\infty),$$

διότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$.

Άρα η αντίστροφη ορίζεται και αυτή στο $(1, +\infty)$. Για την εύρεση του τύπου της έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = x + 1 \Leftrightarrow (y-1)x = 1 + y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Τελικά:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1} = f$ αφού κάθε $x > 1$ ισχύει: $f^{-1}(x) = f(x)$.

Εναλλακτικά:

Θεωρούμε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_2 = 2x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως η f έχει την ιδιότητα «1-1» και ορίζεται η αντίστροφή της.

Θέτουμε $y = f(x)$, $x > 1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \\ \Leftrightarrow xy - y &= x + 1, \quad x > 1 \\ \Leftrightarrow (y-1)x &= 1 + y, \quad x > 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{y+1}{y-1}, \quad x > 1, \quad y \neq 1 \end{aligned}$$

Επειδή: $x > 1$ είναι:

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1-(y-1)}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Τελικά, η αντίστροφη ορίζεται στο $(1, +\infty)$ με:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1} = f$ αφού κάθε $x > 1$ ισχύει: $f^{-1}(x) = f(x)$.

B3. Η r ορίζεται στο $[1, +\infty)$ επομένως εξετάζουμε αν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Για την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$, πρέπει $x > 1$. Έχουμε:

$$(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 4\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)\left(1 - \frac{4}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 4, \text{ γιατί } x > 1.$$

Ακολουθούν σύντομα οι απαντήσεις στα θέματα Γ και Δ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η f είναι συνεχής, είναι συνεχής στο $x = 2$, άρα:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow e^\lambda = 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$, αφού $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Γ2. Για $\lambda = 0$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,2)$ και $(2, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2x + 4, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2(x-2), & x > 2 \end{cases}$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,2) \cup (2, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x = 2$ και στο $x = 0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Τότε, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 5$.

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x = 0$ το $f(0) = 5$.

Γ3.

i. Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$, οπότε αρκεί να εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα $(0,2)$ και $(2,3)$ με:

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2(x-2), & 2 < x < 3 \end{cases}$$

Επίσης:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x - 2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x - 2} = 0$$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$, οπότε δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2,3]$.

ii. Η κλίση της ευθείας ΔE είναι:

$$\lambda = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 5}{3} = -\frac{5}{3}$$

Επειδή για $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) = -2 \neq -\frac{5}{3}$, λύνουμε για $x \in (2,3)$ την εξίσωση:

$$f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2(x-2) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x-2 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$$

οπότε $\xi = \frac{17}{6} \in (2,3)$.

Γ4. Έστω $M(2, y)$. Τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ ισχύει:

$y = y(t), y'(t) = 0,5 \text{ μον. μήκους / sec}$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το M συναντά τη C_f .

Τότε $y(t_0) = f(2) = 1$.

Ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{2}$, άρα κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$$

Τότε, παραγωγίζοντας κατά μέλη έχουμε:

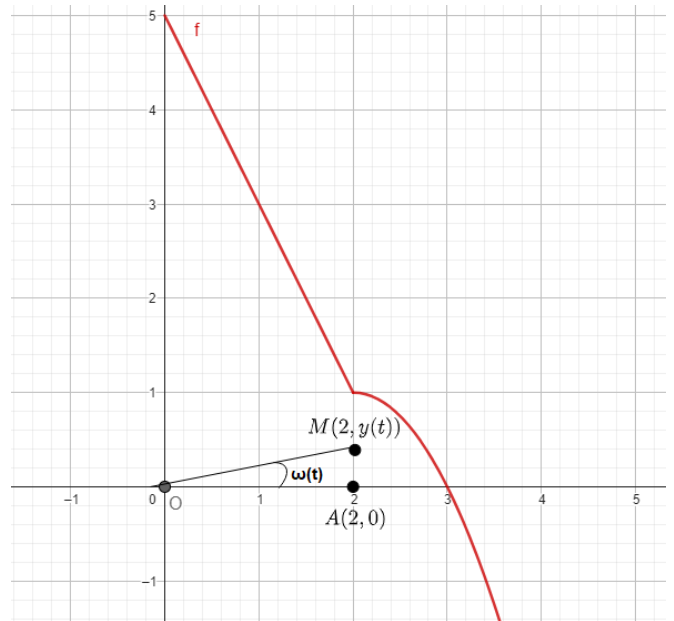
$$\omega'(t)(1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)) = \frac{1}{2}y'(t)$$

$$\Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega(t)} \right)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\varepsilon\varphi\omega(t_0) = \frac{y(t_0)}{2} = \frac{1}{2}$,

άρα:

$$\omega'(t_0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \leq 1 + \frac{1}{e}$ και επομένως υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = 1 + \frac{1}{e}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right) \cdot x - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 .
- Η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο αυτό.

Από το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$

Άρα, $f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1+ae}{e} = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + ae = e + 1 \Leftrightarrow ae = e \Leftrightarrow a = 1$

Οπότε, ο τύπος της f είναι: $f(x) = \frac{\ln x + x}{x}$

Δ2. Ισχύει $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ για κάθε $x > 0$.

$$f'(x) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$$

- $f'(x) < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$ οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2[e, +\infty)$
- $f'(x) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1(0, e]$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, e]$ ισχύει:

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] \text{ δηλαδή: } f(\Delta_1) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e} \right]$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f		O.M.	

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (0, e)$ τέτοιος ώστε: $f(x_0) = 0$

Ισχύουν:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - 2 \ln 2}{1} < 0 \text{ και } f(1) = 1 > 0$$

$$\text{Άρα, } f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x_0) < f(1) \xLeftrightarrow{f \uparrow \text{ στο } (0, e]} \frac{1}{2} < x_0 < 1$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$, ισχύει:

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = \left(1, \frac{1}{e} \right] \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

Επειδή $0 \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$.

Σχόλιο: Οι υποψήφιοι μπορούν να εφαρμόσουν το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ για να αποδείξουν την ύπαρξη ρίζας στο διάστημα αυτό, αλλά δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της ρίζας στο $(0, +\infty)$. Είναι απαραίτητη και πάλι η εύρεση του συνόλου τιμών.

Δ3. i. $f(4) = \frac{2 \ln 2 + 4}{4} = \frac{\ln 2 + 2}{2} = f(e)$ και άρα η εξίσωση $f(x) = f(2) = f(4)$ έχει στο $(0, e]$ μοναδική λύση την $x = 2$ και στο $[e, +\infty)$ μοναδική λύση την $x = 4$.

ii. Ισοδύναμα έχουμε:

$$2^x \leq x^2 \xLeftrightarrow{x > 0} \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow 2 \frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + x}{x} \geq \frac{\ln 2 + 2}{2} \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) = f(4) \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Για κάθε } x \in (0, e] \text{ έχουμε } f(x) \geq f(2) \xLeftrightarrow{f \uparrow \Delta_1} 2 \leq x \leq e$$

$$\bullet \text{ Για κάθε } x \in [e, +\infty) \text{ έχουμε } f(x) \geq f(4) \xLeftrightarrow{f \downarrow \Delta_2} e \leq x \leq 4$$

Επομένως: $x \in [2, 4]$.

Εναλλακτικά:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2^x - x^2$, $x > 0$. Η φ είναι συνεχής και λύνουμε $\varphi(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2^x = x^2 \xLeftrightarrow{x > 0} x \ln 2 = 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = f(2) = f(4).$$

Οπότε $x = 2$ ή $x = 4$. Άρα η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(0,2)$, $(2,4)$ και $(4, +\infty)$. Αλλά: $\varphi(1) > 0$, $\varphi(3) < 0$ και $\varphi(5) > 0$, επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$\varphi(x) < 0$ για κάθε $x \in (2,4)$, δηλαδή $\varphi(x) \leq 0$, για $x \in [2, 4]$. Άρα: $2^x \leq x^2$ για $x > 0$.

Δ4. Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(e^x) = 0$ ή $x = 1 \notin (-\ln 2, 0)$

$\Leftrightarrow e^x = x_0 \Leftrightarrow x = \ln x_0$. Είναι:

$$E = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} |g(x)| dx + \int_{\ln x_0}^0 |g(x)| dx = I_1 + I_2, \quad (1)$$

Για κάθε $-\ln 2 \leq x \leq \ln x_0 \Leftrightarrow e^{-\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq e^x \leq x_0$

$$\stackrel{f \uparrow (0,e]}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(e^x) \leq f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(e^x) \leq 0.$$

Επομένως, $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{2} \leq 0$ και για το ολοκλήρωμα I_1 έχουμε:

$$I_1 = \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} |g(x)| dx = - \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x) dx = - \int_{-\ln 2}^{\ln x_0} f(e^x) \cdot \left(\frac{1-x}{2}\right) dx, \quad (2)$$

Θέτουμε: $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$, οπότε $du = (e^x)' dx \Leftrightarrow du = u dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{u} du$.

Για $x_1 = -\ln 2$ είναι $u_1 = e^{\ln 1/2} = \frac{1}{2}$, ενώ για $x_2 = \ln x_0$ είναι $u_2 = e^{\ln x_0} = x_0$

Οπότε:

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot \left(\frac{1 - \ln u}{u^2}\right) du = - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot f'(u) du = - \frac{1}{2} [f^2(u)]_{\frac{1}{2}}^{x_0} \\ &= - \frac{1}{2} \left[f^2(x_0) - f^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για κάθε

$$\ln x_0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow e^{\ln x_0} \leq e^x \leq e^0 \Leftrightarrow x_0 \leq e^x \leq 1 \stackrel{f \uparrow (0,e]}{\Leftrightarrow} f(x_0) \leq f(e^x) \leq f(1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(e^x).$$

Επομένως, $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{2} \geq 0$ και για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε:

$$I_2 = \int_{\ln x_0}^0 g(x) dx = \int_{\ln x_0}^0 f(e^x) \frac{1-x}{e^x} dx$$

Θέτουμε $u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u$, οπότε: $du = (e^x)' dx = e^x dx = u dx$. Άρα: $dx = \frac{1}{u} du$

Όταν $x_1 = \ln x_0$ είναι $u_1 = x_0$ και όταν $x_2 = 0$ είναι: $u_2 = 1$, οπότε έχουμε:

$$I_2 = \int_{x_0}^1 f(u) \frac{\ln u}{u^2} du = \int_{x_0}^1 f(u) f'(u) du = \frac{1}{2} [f^2(u)]_{x_0}^1 = \frac{1}{2} [f^2(1) - f^2(x_0)] = \frac{1}{2} f^2(1)$$

Τελικά:

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2}[(1 - 2\ln 2 + 4\ln^2 2 + 1)] = 1 - 2\ln 2 + 2\ln^2 2 \text{ τ.μ.}$$