

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 30

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 13

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 59

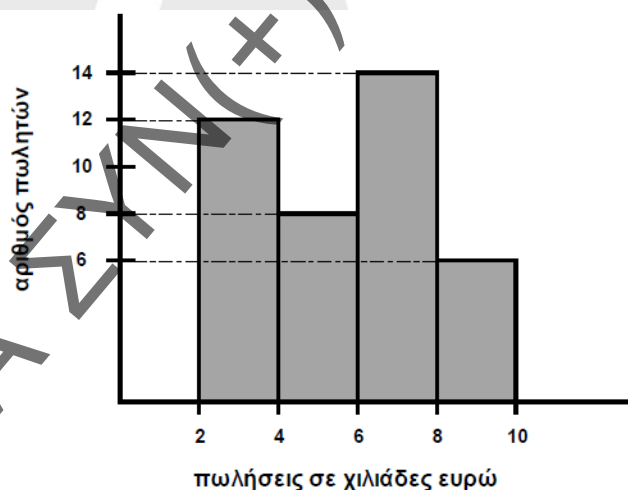
A4. α) **Σωστό** β) **Λάθος** γ) **Λάθος** δ) **Λάθος** ε) **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

B1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων παίρνουμε ότι:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$$

Άρα οι πωλητές της εταιρίας είναι $v = 40$.



B2. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων συμπληρώνουμε τις κλάσεις και τις συχνότητες.

Για την κεντρική τιμή μιας κλάσης $[α, β)$ ισχύει: $x_i = \frac{(α+β)}{2}$ για $i = 1, 2, 3, 4$

Για τις σχετικές συχνότητες ισχύει: $f_i = \frac{v_i}{v} = \frac{v_i}{40}$, για $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i
$[2, 4)$	3	12	0,3
$[4, 6)$	5	8	0,2
$[6, 8)$	7	14	0,35
$[8, 10)$	9	6	0,15
Σύνολα		40	1

B3. α) Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i \cdot v_i = \frac{1}{40} (3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6) = \frac{228}{40} = 5,7$$

β). Έστω y το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις στο διάστημα $[4,5, 6)$ σε χιλιάδες ευρώ. Εφόσον οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση έχουμε:

$$\frac{6 - 4,5}{6 - 4} = \frac{x}{v_2} \Leftrightarrow x = 6$$

$v_3 + v_4 = 14 + 6 = 20$ πωλητές έκαναν πωλήσεις στο διάστημα $[6,10)$.

Άρα $6 + 20 = 26$ έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(4 \cdot x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1\right)' = 12x^2 - 7x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{3}$, αφού $x_1 < x_2$.

Επομένως, κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
f		↗	↘	↗

Τελικά, προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = \frac{1}{4}$ οπότε: $P(K) = \frac{1}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = \frac{1}{3}$ οπότε: $P(A) = \frac{1}{3}$.

Από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων ισχύει:

$$P(K \cup A \cup \Pi) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = \frac{5}{12}$$

Γ2. Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα K, A, Π είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

Για το ενδεχόμενο Γ έχουμε:

$$P(\Gamma) = P(K \cup A) = P(K) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Για το ενδεχόμενο Δ έχουμε:

$$P(\Delta) = P((K \cup A)') = 1 - P(K \cup A) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Για το ενδεχόμενο E έχουμε:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cup \Pi') = P(A) + P(\Pi') - P(A \cap \Pi') = P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A - \Pi) \\ &= P(A) + 1 - P(\Pi) - P(A) + P(A \cap \Pi) = 1 - P(\Pi) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

β' τρόπος (χωρίς χρήση κανόνων λογισμού πιθανοτήτων):

$$P(E) = P(A) + P(K) = \frac{7}{12}$$

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα Γ και E είναι ίσα.

Γ3. Ισχύει:

$$N(\Pi) = N(A) + 4 \Leftrightarrow \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(\Pi) = P(A) + \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{4}{N(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow N(\Omega) = 48 \text{ μπάλες έχει το δοχείο.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν το μήκος του κουτιού είναι x και το πλάτος του κουτιού είναι y , τότε από το γεγονός ότι η περίμετρος είναι 20cm έχουμε: $2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x$

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού προκύπτει ως το άθροισμα των επιφανειών της βάσης, που έχει εμβαδό: $x \cdot y = x(10 - x)$ και των πλαϊνών εδρών που είναι ανά δύο ίσες και έχουν εμβαδό: $5 \cdot x$ και $5 \cdot y = 5(10 - x)$ αντίστοιχα.

$$\text{Οπότε: } E(x) = x(10 - x) + 2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5(10 - x) = -x^2 + 10x + 100, \text{ με } 0 < x < 10.$$

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με $E'(x) = -2x + 10$

Λύνουμε: $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ και κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας ακροτάτων:

x	0	5	10
$E'(x)$	+	○	-
E			

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5$, άρα το κουτί έχει για $x = 5$ μέγιστη επιφάνεια.

Δ2 α. Η εξίσωση $2s^2 - 5s + 2 = 0$ έχει λύσεις: $s = 2$ ή $s = \frac{1}{2}$

Γνωρίζουμε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, επομένως:

$$CV > 10\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{8} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow s > \frac{4}{5}$$

Οπότε, δεκτή λύση είναι η $s = 2$.

Δ2 β. Η διακύμανση δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^v t_i)^2}{v} \right\} \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} \right)^2 \Leftrightarrow s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$
$$\Leftrightarrow 4 = \overline{x^2} - 64 \Leftrightarrow \overline{x^2} = 68$$

Δ3. Από το ερώτημα Δ1 η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[5, 10)$ και επειδή $x_1 < x_2 < \dots < x_{15}$ παίρνουμε: $E(x_1) > E(x_2) > \dots > E(x_{15}) \Leftrightarrow y_1 > y_2 > \dots > y_{15}$.

Για το εύρος είναι: $R = y_1 - y_{15} = E(5) - E(9) = 125 - 109 = 16$.

Για το ενδεχόμενο B είναι:

$$y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 144 + 1$$

$$\Leftrightarrow -x_i^2 + 14x_i - 45 > 0 \Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0$$

$$\Leftrightarrow 5 < x_i < 9$$

Άρα: $i = 2, 3, \dots, 14$ και $B = \{A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_{14}(x_{14}, y_{14})\}$ από το

$$\Omega = \{A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_2, y_2), \dots, A_{14}(x_2, y_2), A_{15}(x_{15}, y_{15})\}$$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα παίρνουμε:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$$